CAPITULO 3

LEY FÍSICA PARA CANTIDADES FÍSICAS CON ALEATORIEDAD NO CUANTIFICADA.

El propósito de este capítulo es definir, con un alto nivel de confianza, que el comportamiento observado en el fenómeno no es el resultado de un comportamiento fortituo, es decir, se debe tener confianza que las implicaciones que se desprendan del comportamiento observado del fenómeno sean siempre validas en el rango analizado. Para demostrar la validez de la relación encontrada (línea de mejor ajuste), se recurren a pruebas estadísticas relacionadas con la aleatoriedad de la cantidad física dependiente. Recuerde que cualquier cantidad física que se mide, tendrá un comportamiento aleatorio representado por una función de distribución Gaussiana. Por lo tanto, si se considera que la aleatoriedad de la cantidad física dependiente es pequeña y que no es posible detectarla por las limitaciones del instrumental utilizado para medir esta cantidad, entonces, se utiliza el concepto de **Coeficiente de Correlación** para definir la Ley Física. En caso contrario, cuando se ha detectado una aleatoriedad en la cantidad física dependiente, entonces se utiliza otra técnica estadística que requiere de un conocimiento mayor de la estadística y que requiere también de un mayor control del proceso de reproducción del fenómeno, dicha técnica será desarrollada en el capítulo 4. En la sección 3.1 de este capítulo se expone lo relacionado con el coeficiente de correlación, su propósito y sus limitaciones, así como el criterio utilizado para definir la ley física. En la sección 3.2 se expone una forma de generar las implicaciones de la ley física (caracterización del fenómeno), para facilitar su comparación con las posibles implicaciones generadas por la hipótesis previamente planteada. En la sección 3.3 se aplican los conceptos antes expuestos a un fenómeno de la cinemática de las partículas En la sección 3.4 se expone una variante cuando el coeficiente de correlación no está en el rango recomendado La comparación de resultados cuando la ley física es no lineal se desarrolla en la sección 3.5 y se utiliza en la sección 3.6 otro fenómeno de la cinemática para ejemplificar esta variante.

3.1 COEFICIENTE DE CORRELACIÓN.

El coeficiente de correlación (r) es una entidad que pertenece a la teoría de la Probabilidad y la

Estadística y como tal, requiere de amplios conocimientos de estas teorías para comprender sus propiedades. Por estar fuera del alcance de este curso, no se profundiza en estos conocimientos, pero para aquel lector que esté interesado en este tema, puede consultar las referencias (10,11). Esto no impide que se puedan utilizar las propiedades y características de esta entidad sin necesidad de demostrar su validez. Una de estas características, es la referente a que esta entidad se determina en el espacio de dos variables aleatorias (X,Y) donde existe una función de distribución conjunta que establece una dependencia entre las dos variables. Se puede demostrar que si la variable aleatoria Y es directamente proporcional a la variable aleatoria X, entonces el coeficiente de correlación es igual a 1. Si la variable aleatoria Y es inversamente proporcional a la variable aleatoria X, entonces el coeficiente de correlación es igual a -1. También se puede demostrar que el inverso de estas implicaciones son validas, es decir:

Si $r = 1$, entonces $Y = mX + b$ (con $m > 0$)

Si $r = -1$, entonces $Y = mX + b$ (con $m < 0$)

3.1.a) CRITERIO DE ACEPTACIÓN.

El comportamiento de algún fenómeno físico es observado vía la medición de la cantidad físicas dependiente Y y la cantidad física independiente X. Es de mucha importancia determinar si la variación observada por la cantidad Y es atribuida a la variación de la cantidad X y no es debida a un proceso fortuito. El parámetro que permite conocer estos efectos de variación es el llamado Coeficiente de Determinación (r^2), el cual especifica la proporción de la variación observada en Y que es atribuida a la variación de X.

Coeficiente de Determinación = (Coeficiente deCorrelación)^2 = r^2

Para algún caso cuando $\mathbf{r^2 = 0.985}$ indica que el 95% de la variación mostrada por Y se le atribuye a la variación de X. De tal forma que, si dos cantidades X,Y están relacionadas linealmente como $Y=mX+b$, entonces: $r^2 = (r)^2 = (1) = 1$, indicando que el 100% de la variación de Y es atribuida a la variación de X.

En el mundo real, al considerar un dispositivo experimental con X, Y como cantidades físicas
involucradas en el fenómeno y debido que está presente un proceso de medición de X y Y y como no existe un control absoluto en el dispositivo experimental, se observa que al construir la gráfica de dispersión con los valores medidos, estos puntos experimentales no están perfectamente alineados. Es decir que existe una variación en Y que no se puede explicar con la variación de X. Por tanto, en un proceso experimental, no es posible observar una relación lineal perfecta entre dos variables y en consecuencia no es posible obtener un coeficiente de determinación igual uno.

Por lo tanto, es recomendable aceptar que existe una relación lineal entre dos cantidades físicas cuando el coeficiente de Determinación es muy cercano a uno. La cercanía a uno del coeficiente de Determinación depende de la aleatoriedad en Y que se espera observar en el proceso experimental, de tal forma para nuestro caso en particular, es aceptable tener por lo menos un coeficiente de determinación de un valor de **0.985**

CRITERIO DE ACEPTACIÓN:

Se acepta que existe una relación lineal entre las variables X, Y cuando su Coeficiente de Determinación es de por lo menos de 0.985

Por lo tanto se dice que:

La línea de mejor ajuste Y = m*X + b* representa adecuadamente el comportamiento del fenómeno o se considera como una *Ley Física* si su coeficiente de Determinación es de por lo menos de 0.985

El Coeficiente de Determinación se calcula con la expresión siguiente:

$$r^2 = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - \frac{(\sum_{i=1}^{n} X_i)(\sum_{i=1}^{n} Y_i)}{n}\right)^2}{\left[\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{n} X_i)^2}{n}\right]\left[\sum_{i=1}^{n} Y_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{n} Y_i)^2}{n}\right]} \quad \text{.....} ec.3.1$$

PRIMERA RECOMENDACIÓN EN EL ANÁLISIS.

Para determinar una ley física, no se debe limitar solo al cálculo del coeficiente de Determinación y aplicar el criterio anterior, sino que se debe realizar un análisis conjunto en los términos siguientes:

ANÁLISIS CONJUNTO:

Primero.- Mediante una inspección visual a la gráfica de dispersión, se debe definir la posible tendencia de los puntos graficados. Esta puede ser lineal, parabólica, exponencial, logarítmica, inversa etc.

Segundo.- Calcular el Coeficiente de Determinación y verificar si su valor lo hace congruente con la tendencia definida en el primer punto.

En caso de que la tendencia resulte lineal, continuar al paso siguiente:

Tercero.- Trazar la línea de mejor ajuste sobre la gráfica de dispersión y observar que los puntos graficados muestren una ubicación aleatoria alrededor de dicha línea de mejor ajuste.

Este análisis conjunto es necesario porque se dan casos en que el coeficiente de Determinación es muy cercano a uno, más sin embargo, la línea de mejor ajuste no muestra la representatividad de los valores experimentales. También se presenta el hecho de que se cumplen las dos primeras condiciones (1° Pasa la inspección visual y 2° El coeficiente de Determinación es muy cercano a uno), más sin embargo, se observa que los puntos graficados presentan un pequeño patrón de comportamiento que la línea de mejor ajuste no puede

representar. Es decir, que los puntos graficados no están colocados en forma aleatoria alrededor de la línea de mejor ajuste. Para ilustrar este aspecto observe la la figura 3.0, para mayor información puede consultar el apéndice B de estas notas.

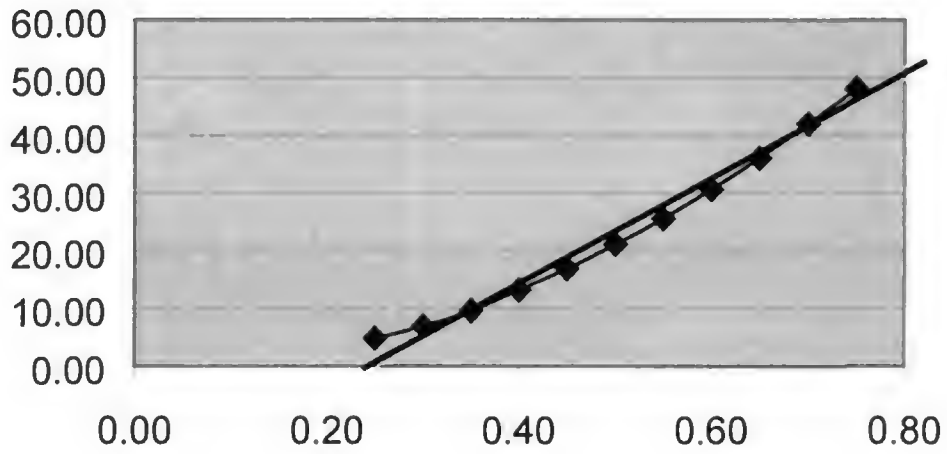

Figura 3.0.- Puntos graficados con una tendencia diferente a la lineal

Por tanto, surge una contradicción, puesto que se observa que la línea de mejor ajuste no sigue la tendencia que los valores experimentales graficados. Esta contradicción invita a realizar otra prueba estadística para comprobar la linealidad o la no-linealidad entre las cantidades físicas involucradas. Una de estas pruebas, que se expondrá en las siguientes secciones, es la referente a la determinación del exponente de la variable independiente utilizando el método de la Transformación Z.

3.2.- COMPARACIÓN DE RESULTADOS CUANDO LA LEY FÍSICA ES LINEAL.

En esta sección se aborda el último paso del proceso de experimentación, el cual consiste en determinar si la hipótesis planteada es **falsa** o **verdadera.** Esta determinación se logra comparando a la Ley Física y con lo expresado en la hipótesis planteada.

Pero debido a que la Ley Física es una expresión matemática y la hipótesis en una expresión textual, se hace necesario interpretar a la ley física en los mismos términos utilizados en la hipótesis y de esta forma tener la posibilidad de realizar una comparación y determinar la

similitud entre ambas partes **(Hipótesis Verdadera)** o la contradicción en las partes **(Hipótesis Falsa).** Una forma de generar implicaciones o de interpretar la Ley Física, consiste en caracterizar al fenómeno, utilizando conceptos ya conocidos y aceptados.

3.2.a.- CARACTERIZACIÓN DEL FENÓMENO.

La Ley Física define la existencia de una relación entre dos cantidades físicas (X,Y) que se considera válida en las condiciones en que se realizó el proceso de experimentación y dentro del rango de variación de la variable independiente. En consecuencia, esta Ley Física puede ser utilizada para caracterizar o interpretar una cierta faceta del fenómeno estudiado. Por ejemplo, en el caso del fenómeno anterior, se considera a:

Cantidad física independiente X → tiempo (seg).

Cantidad física dependiente Y → Magnitud del vector desplazamiento(D).

Ley Física → D = m* t + b*

Esta Ley Física establece la magnitud más probable del vector desplazamiento de un móvil (deslizador) que se mueve sobre una línea recta (riel de colchón de aire) para cualquier tiempo t que se encuentra dentro de su rango de variación.

La figura 3.1 muestra la gráfica de la ley física que representa adecuadamente las características del movimiento de la partícula.

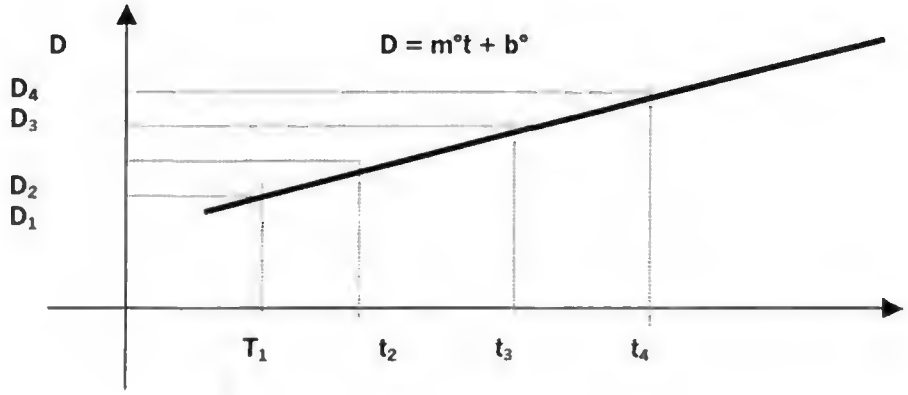

Figura 3.1.- Gráfica de la Ley Física.

Considere un punto de coordenadas (t_1, D_1) sobre la línea recta, entonces: $D_1 = m*t_1+b*$ Y

el punto de coordenadas (t_2, D_2) también está sobre la línea recta: $D_2 = m^*t_2+b^*$

De la figura 3.1 se observa que la razón de cambio del desplazamiento con respecto al tiempo

para dos instantes de tiempo t_1, t_2:

$$\frac{D_2 - D_1}{t_2 - t_1} = \frac{m^* t_2 + b^* - m^* t_1 - b^*}{t_2 - t_1} = \frac{m^*(t_2 - t_1)}{t_2 - t_1} = m^*$$

La ecuación anterior significa que el cambio del desplazamiento con respecto al tiempo es m*. Esta relación es válida para dos instantes de tiempo cualesquiera (ver figura 3.1).

$$\frac{D_4 - D_3}{t_4 - t_3} = \frac{m^* t_4 + b^* - m^* t_3 - b^*}{t_4 - t_3} = \frac{m^*(t_4 - t_3)}{t_4 - t_3} = m^*$$

A esta razón de cambio se le llama Rapidez Media (v), cuyas unidades son [v] = L/T. Donde el símbolo [W] significa las unidades de referencia de la cantidad física W y donde L indica unidades de Longitud tales como: Metros, centímetros, Kilómetros, pulgadas, etc. Y la literal T indica unidades de tiempo tales como: Segundo, hora, minuto, etc. Entonces se dice que la partícula desarrolla un movimiento con rapidez media constante. Es importante observar que el valor de la rapidez media de la partícula no depende del valor b*, el cual se puede interpretar al considerar un tiempo inicial t_0 = 0 seg, que significa que las mediciones de tiempo se inician con los relojes ajustados a 0.0 seg. Si este tiempo se sustituye en la ley física obtenida, se tiene que el desplazamiento Inicial Do es: Do = m*(0)+b* = b*, lo que indica que el parámetro b* de la ley física, representa el desplazamiento que tiene la partícula con respecto al sistema de referencia cuando se inicia el análisis del movimiento de la partícula.

En el cálculo de la rapidez media es suficiente saber los valores iniciales y finales del movimiento rectilíneo de la partícula, sin importar como fue el movimiento entre dichos puntos. Con el propósito de conocer con mayor detalle la forma de movimiento de la partícula a lo largo de todo su movimiento, consideremos dos instantes de tiempo t_1 y t_2 muy cercanos, es decir, que el intervalo de tiempo $\Delta t = t_2 - t_1$ sea muy pequeño. Para este caso se observa que la razón de cambio del Desplazamiento con respecto a este intervalo de tiempo es m*, debido a que la pendiente de la línea recta permanece constante. Este proceso de considerar punto muy cercanos se representa de la forma siguiente:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{D_f - D_i}{t_f - t_i} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta D}{\Delta t}$$

Esta expresión se conoce, en cálculo diferencial, como Derivada del Desplazamiento con respecto al tiempo y denota como $(\frac{dD}{dt})$ y como se refiere a la rapidez en un intervalo de tiempo muy pequeño, ésta se le conoce como Rapidez Instantánea (v). Utilizando las reglas de derivación y la expresión de la ley física, se obtiene:

$$\textit{Rapidez Instantánea} = v = \frac{d(D)}{dt} = \frac{d(m*t+b*)}{dt} = \frac{d(m*t)}{dt} + \frac{d(b*)}{dt} = m* + 0 = m*$$

También se sabe de la cinemática que:

$$\textit{Aceleración Instantánea} = a = \frac{d(v)}{dt} = \frac{d(m*)}{dt} = 0$$

Por lo tanto, se obtiene la expresión que representa el movimiento rectilíneo con rapidez (instantánea) constante, también conocido como **Movimiento rectilíneo Uniforme.**

D = vt + Do ec.3.2

HIPÓTESIS FALSA o VERDADERA.

Se ha concluido que el objeto efectúa un movimiento rectilíneo con velocidad constante, por lo tanto, se puede decir que si la hipótesis planteada fue:

a) "El objeto se mueve con velocidad constante" → **Hipótesis Verdadera**

b)"El objeto recorre distancias iguales en tiempos iguales" → **Hipóteis Verdadera.**

(ver figura 3.1)

c) "El objeto efectúa un movimiento acelerado" → **Hipótesis Falsa.**

Por otra parte, si se hace coincidir la dirección del desplazamiento de la partícula con el eje positivo de las "X", entonces se puede representar cualquier desplazamiento como un vector horizontal de la forma siguiente:

Donde D es el vector desplazamiento
D es la magnitud del vector desplazamiento
i es un vector con dirección del eje positivo de las X y de magnitud unitaria

Por tal motivo, la ecuación ec.3.2 se puede expresar como: V = $\frac{D - D_0}{t}$ y como los desplazamientos son cantidades vectoriales, entonces se tiene:

$$\vec{v} = \frac{1}{t}(\vec{D} - \vec{D}o) \quad \text{ec.3.3}$$

Cuando el origen de referencia se ubica en el punto de inicio del movimiento de la partícula, entonces Do = 0, de tal forma que la ecuación ec.3.3 resulta:

$$\vec{v} = \frac{1}{t}\vec{D} \quad \text{ec.3.4}$$

De la ec.3.4 se desprende que la cantidad v es una cantidad vectorial porque resulta de multiplicar al vector *D* por una cantidad escalar 1/t, con la misma dirección y el mismo sentido que el vector *D* pero de magnitud v = (l/t)D.

3.2.b.- EVALUACIÓN DEL EXPERIMENTO.

Para evaluar un experimento se recurre a la comparación de resultados obtenidos en la caracterización del fenómeno con los resultados de aplicar al fenómeno físico los conceptos teóricos. Es decir, es posible comparar las implicaciones de la ley Física mediante la determinación de un Valor Experimental (V_{exp}) con el cálculo del valor Teórico (V_{teo}), de la manera siguiente:

$$\textit{Error Experimental } E_{exp} = \frac{|V_{teo} - V_{exp}|}{V_{teo}} * 100\%$$

Otra forma de comparar los resultados experimentales con implicaciones teóricas es utilizando expresiones teóricas que resulten semejantes con la relación obtenida como Ley Física. Por ejemplo:

Expresión experimental: D = m*t + b*

Expresión Teórica de la cinemática de las partículas: D = vt+ Do

Por simple comparación de las expresiones anteriores se puede establecer que:

v = m*; Do = b*

3.3.- TRABAJO EXPERIMENTAL PROPUESTO.

1.- Considere una vez más el fenómeno del Movimiento Rectilíneo del deslizador sobre el riel de colchón de aire en un plano horizontal que se realizó en la sección 2.6.a y formule una hipótesis referente al tipo de movimiento que desarrolla el deslizador. Por ejemplo puede seleccionar alguna de las hipótesis siguientes:

" El deslizador se mueve con velocidad constante"

" El deslizador tiene desplazamientos iguales en tiempos iguales"

" El deslizador se mueve con aceleración constante diferente de cero"

2.- Considere la tabla de resultados y la línea de mejor ajuste que se obtuvo en la sección 2.6.a. Determine el valor del coeficiente de Determinación con la ecuación 3.1 y obtenga la ley física cuando así sea considerado y continúe con el inciso siguiente. En caso contrario termine.

3.- Determine los valores característicos del movimiento del deslizador y compare estos valores con la o las implicaciones de la hipótesis planteada. Finalice especificando la **Validez o Falsedad** de la hipótesis planteada.

3.4.- LEY FÍSICA NO LINEAL

El aceptar que la línea de mejor ajuste represente adecuadamente el comportamiento de las variables físicas involucradas, bajo cierto nivel de confianza, es aceptar que la relación entre dichas cantidades físicas es de tipo lineal. Esta relación lineal es posible observarla en la gráfica de dispersión de las cantidades físicas, pero en muchos casos, la gráfica de dispersión muestra una relación, que está muy lejos de ser lineal (ver figura 3.2).

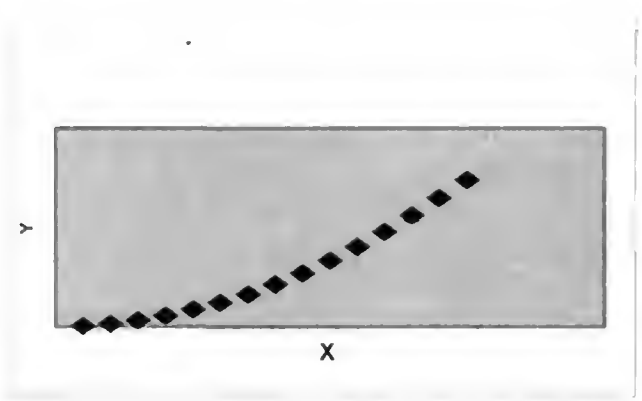

Figura 3.2 .- Gráfica de Dispersión

Con el propósito de encontrar el tipo de relación entre las cantidades físicas originales (X,Y) y seguir aplicando el mismo criterio de aceptación, se procederá a aplicar un método matemático, que llamaremos Transformación Z, el cual consiste en demostrar que existe una relación lineal entre cantidades modificadas (W,Z) que involucren a las cantidades físicas originales (X,Y), para después proceder a una transformación inversa y así obtener la relación entre las cantidades físicas originales. El aplicar este método no quiere decir que se transforma el fenómeno físico que dio origen a los datos graficados, solo es un artificio matemático para encontrar la relación entre las cantidades físicas originales (X,Y).

3.4.a.- TRANSFORMACIÓN ZETA(Z)

En esta sección se expone el procedimiento para determinar los parámetros de la línea de mejor ajuste entre variables modificadas cuando la línea de mejor ajuste entre las variables originales no satisface el criterio de aceptación. Este procedimiento consiste en modificar (o Transformar) los valores de las cantidades originales de forma tal que se observe, al graficar dichos valores y se compruebe, al calcular el coeficiente de Determinación, que existe una relación lineal entre ellos. El tipo de la transformación depende de la tendencia mostrada en la gráfica de dispersión de las cantidades originales. En la figura 3.3 se muestran varias tendencias y las transformaciones Z que son requeridas, en algunas de ellas solo basta con transformar la variable dependiente o solo la variable independiente o ambas.

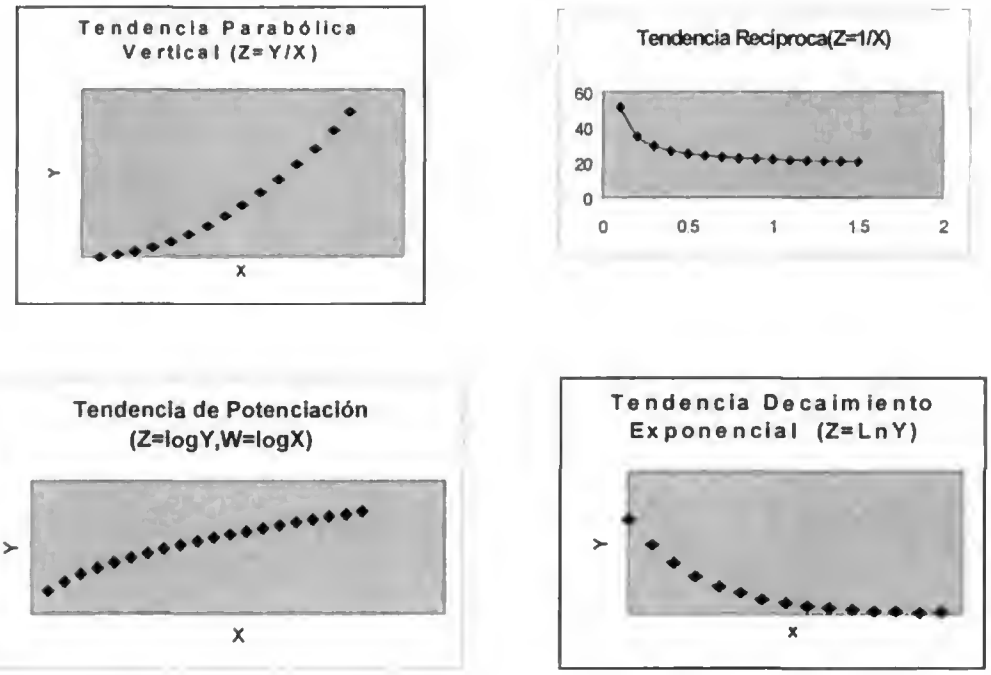

Figura 3.3.- Gráfica de las tendencias más comunes

El análisis de los valores que dan origen a la gráfica mostrada en la figura 3.2, se inicia con el cálculo del coeficiente de Determinación, cuyo valor esta fuera del rango requerido para aceptar como lineal la relación existente entre las cantidades graficadas. Esta conclusión es congruente con lo mostrado por dicha figura 3.2. En dado caso se procede a la búsqueda del tipo de relación no lineal mostrada por las cantidades involucradas, para ello se procede de la manera siguiente:

1°.- En base a la tendencia mostrada por los datos originales X,Y se selecciona un transformación Z. Es conveniente aclarar que es posible utilizar otras transformaciones que alcancen el mismo objetivo. Para el caso de la tendencia mostrada en la figura 3.2 se tiene que:

Transformación seleccionada Z = "V/X

Esta transformación modificará los valores de las ordenadas, quedando las abscisas sin modificación

2°.- Se aplica la transformación Z=Y/X a cada uno de los datos, obteniéndose valores de Z para cada pareja de valores de (x,y), como se muestra en la 4ª columna de la tabla 3.1.

Medición	X	Y	Z=Y/X
1	X_1	Y_1	$Z_1=Y_1/X_1$
2	X_2	Y_2	$Z_2=Y_2/X_2$
3	X_3	Y_3	$Z_3=Y_3/X_3$
	;		;
N	X_n	Y_n	$Z_n=Y_n/X_n$

TABLA 3.1.- Tabla de valores originales y valores transformados.

Con la tabla 3.1 se procede a desarrollar los pasos del proceso de experimentación considerando las parejas de valores de (X, Z)

3°.- Construir la gráfica de dispersión de las pareja de valores X,Z

4°.- Determinar los valores de los parámetros de la línea de mejor ajuste Z = m**X + b**.

Se denota m** y b** los parámetros de la línea de mejor ajuste para diferenciarlos de los parámetros de la línea de mejor ajuste para los datos originales X,Y.

5°.- Determinar el coeficiente de Determinación para los valores X,Z y aplicar el criterio de aceptación para aceptar o rechazar la relación lineal entre Xy Z.

En el caso que el coeficiente satisfaga el criterio de aceptación, esto indica que existe una relación lineal entre X y Z, bajo un cierto nivel de confianza. De tal forma que se puede decir que Z =m**X + b** es una relación válida, por tanto, como Z = Y/X, se tiene:

$$Y/X = m^{**}X+b^{**} \qquad \text{Despejando se tiene: } Y = m^{**} X^2 + b^{**} X$$

La expresión anterior resulta ser la buscada ley física del tipo **cuadrática.** En el caso contrario de no satisfacer el criterio de aceptación, es posible que no se haya utilizado la transformación correcta o que simplemente que los valores originales X, Y no presentan ninguna tendencia que pueda tener un nivel de confianza aceptable y por lo tanto no es posible definir una relación que represente adecuadamente el comportamiento del fenómeno.

SEGUNDA RECOMENDACIÓN EN EL ANÁLISIS

Cuando existe duda sobre la linealidad entre los valores graficados, se recomienda hacer una

análisis adicional para determinar el valor del exponente de la variable independiente y conocer si este es muy cercano a 1.0 (relación lineal) o es más cercano a 2.0 (relación cuadrática).

ANÁLISIS ADICIONAL.

Este análisis consiste en aplicar el método de la transformación en ambas variables de la forma siguiente:

$$\mathbf{W = Ln(x)\ ,\ Z = Ln(Y)}$$

Se espera que el coeficiente de determinación para las variables transformadas ($r_{W,Z}$) sea mayor que el coeficiente de determinación para las variables originales ($r_{W,Z}$) y aumenta la representatividad de la línea de mejor ajuste de las variables transformadas, por tanto se acepta la existencia de una relación lineal entre las variables transformadas de la forma:

$$\mathbf{Z = m^{**}W+b^{**}}$$

Pero se sabe que: W = Ln(X) y Z = Kn(Y), entonces se tiene:

$$\mathbf{Ln(Y) = m^{**}Ln(X)+b^{**}}$$

Aplicando las propiedades de los logaritmos:

$$Ln(Y) = Ln(X)^{m}{**} + b{**}$$

$$Si\ consideramos\ que : b{**} = Ln(b)$$

$$Ln(Y) = Ln(X)^{m}{**} + Ln(b) = Ln(bX^{m}{**})$$

$$Aplicando\ la\ \exp onencial\ a\ ambos\ lados\ de\ la\ ecuación,\ se\ tiene :$$

$$\varepsilon^{Ln(Y)} = \varepsilon^{Ln(bX^{m**})} \Rightarrow Y = bX^{m**}$$

Esta última expresión muestra, con un nivel de confianza mayor, el tipo de relación que existe entre las variables originales, de tal forma que si el parámetros m** es muy cercano a 1.0, entonces la relación entre las variables es lineal, pero si m** es muy cercano a 2.0 entonces la relación entre las variables es del tipo **Cuadrática.**